Оглавление

1.....1
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных 2
1.1. Функции нескольких переменных.....2
1.2. Предел. Непрерывность. Частные производные первого порядка 4
1.3. Полный дифференциал.....6
1.4. Градиент функции. Производная по направлению.....8
1.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков.....10
1.6. Экстремумы функции двух переменных 11
1.7. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области13
1.8. Эластичность функции 18
1.9. Метод наименьших квадратов 19

1.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

1.1. Функции нескольких переменных

Закон, по которому каждой паре независимых переменных $(x; y) \in D$ ставится в соответствие единственное значение z, называется ***функцией двух переменных*** $z = f(x; y)$.

Величины x и y являются ***независимыми*** переменными, или аргументами, а z – ***зависимой*** переменной.

При нахождении частного значения функции $z = f(x; y)$, которое она принимает при конкретных значениях аргументов $x = x_0$, $y = y_0$ используют обозначение $z_0 = f(x_0;y_0)$. Например, если $z = x^2+y^2 + 1$ и $x_0 = 3$; $y_0 = 4$, то

$z = 3^2+4^2 + 1 = 26$.

Чтобы задать функцию двух переменных, следует задать способ, с помощью которого для каждой пары $(x; y) \in D$ можно найти соответствующее значение функции. Функцию двух переменных задают ***аналитическим или табличным*** способами.

Областью определения D функции $z = f(x; y)$ называется совокупность точек $(x; y)$ плоскости xOy, в которых данная функция определена.

Аналогично определяется функция трех переменных:

$$u = f(x; y; z),\ (x; y; z) \in D,$$

либо n переменных – $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n),\ (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in D.$

Множество значений, принимаемых переменной z в области определения, называется ***множеством значений функции.***

Точки области определения, не лежащие на границе, называются ***внутренними.***

Область, содержащая все свои граничные точки, называется ***замкнутой.***

Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой областью.***

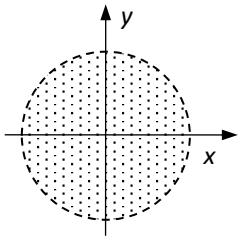


Рис. 1

Пример 1. Найти область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Решение. Для существования функции z необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \text{ или } 1 > x^2 + y^2.$$

Этому неравенству удовлетворяет внутренняя часть круга единичного радиуса. Причем граница не входит в область определения функции (рис. 1). Пунктиром обозначается граница в том случае, когда она не входит в область определения функции.

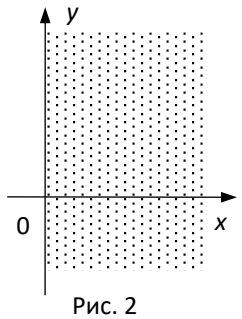


Рис. 2

Пример 2.

Найти область определения функции $z = y + \sqrt{x}$.

Решение. Функция существует для всех $x \geq 0$ и $y \in R$, то есть в правой полуплоскости (рис. 2).

Графиком функции двух переменных называется поверхность $z = f(x; y)$ в трехмерной системе координат.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x; y)$ называется линия $f(x; y)$ на плоскости xOy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$ (рис. 3).

Например, требуется найти линии уровня функции $z = f(x; y) =$

Так как линии уровня функции $z = f(x; y) = e^{x+y} -$ это семейство линий га плоскости xOy, описываемое уравнением $e^{x+y} = C$, то представим это уравнение в другой форме, выполняя следующие преобразования:

$$e^{x+y} = C \qquad \text{или} \qquad e^{x+y} = e^{\ln C},$$

Следовательно,

$$x + y = \ln C$$

Пусть $\ln C = C^*$, тогда

$$y = C^* - x \qquad \text{(семейство прямых линий)}$$

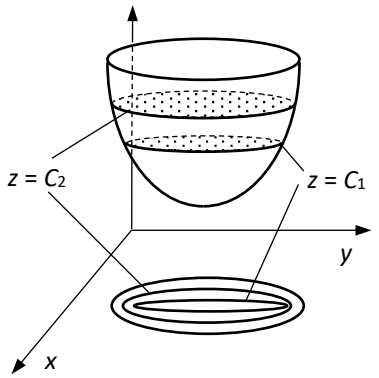


Рис. 3

Построение линий уровня, соответствующих различным значениям постоянной величины C, позволяет увидеть характер поверхности, заданной исследуемой функцией.

Сгущение линий уровня означает более быстрое изменение значений функции. Редкое расположение линий уровня характеризует пологую поверхность, т.е. значения функции изменяются медленно.

1.2. Предел. Непрерывность. Частные производные первого порядка

Число A называется ***пределом функции*** $f(x; y)$ при стремлении точки $M(x; y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x; y)$, для которых выполняется неравенство $\overline{MM_0} < r$ (т. е. точка $M(x; y)$ попадает внутрь круга радиуса r с центром в точке M_0), имеет место неравенство

$$| f(x;\ y) - A | < \varepsilon .$$

Если число A является пределом функции $f(x; y)$ при $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$, то пишут:

$$\lim_{M \to M_0} f(x;\ y) = A .$$

Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x; y)$. Функция $z = f(x; y)$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0; y_0)$, если имеет место равенство

$$\lim_{M \to M_0} f(x;\ y) = f(M_0) = f(x_0;\ y_0) .$$

Частной производной от функции $z = f(x; y)$ по независимой переменной x называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x;\ y) - f(x;\ y)}{\Delta x} = f'_x(x;\ y), \qquad (1)$$

вычисленная при постоянном значении *y*.

Частной производной по *y* называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;\ y+\Delta y)\ - f(x;\ y)}{\Delta y} = f'_y(x;\ y) \qquad (2)$$

вычисленная при постоянном значении *x*.

С геометрической точки зрения частная производная по *x* представляет собой тангенс угла наклона касательной, проведенной к функции в точке *x* в плоскости *y* = const, с осью *Ox*, то есть tg α (рис. 4 а). Частная производная по *y*, соответственно – тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке *y* в плоскости *x* = const, с осью *Oy*, то есть tg β (рис. 4 б)).

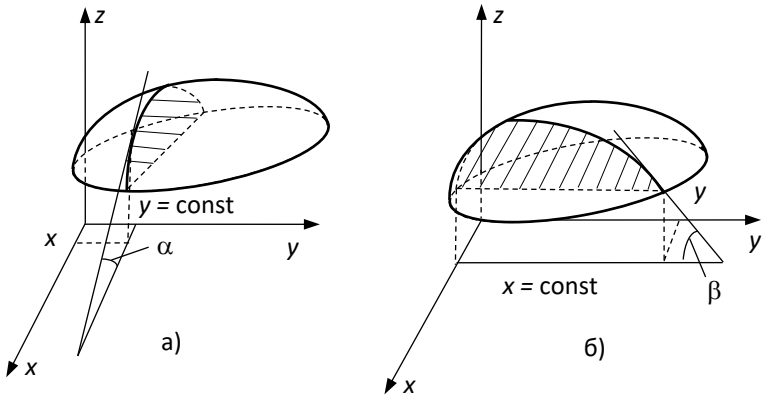


Рис. 4

Пример 3. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции

$$z = x^3 + x^2 y - 2xy^5 + 3x - 4\,.$$

Решение. При вычислении производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ величина *y* считается постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy - 2y^5 + 3\,.$$

При вычислении производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ величина *x* считается постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 10xy^4\,.$$

1.3. Полный дифференциал

Полным приращением функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y),$$

где Δx и Δy – произвольные приращения аргументов функции.

Полное приращение функции z можно представить следующим образом:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (3)$$

где α и β – бесконечно малые.

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x; y)$ называется главная линейная часть полного приращения Δz:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (4)$$

Полный дифференциал dz (4) отличается от полного приращения функции Δz (3) на бесконечно малую величину более высокого порядка $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Аналогично, полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\ . \qquad (4^*)$$

Функция называется ***дифференцируемой в точке***, если она в ней имеет полный дифференциал.

Пример 4. Вычислить полный дифференциал функции

$$z = x^3y^2 - xy^4 + 10\ .$$

Решение. Частные производные функции будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - y^4,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 4xy^3\ .$$

Тогда полный дифференциал, согласно (4), будет равен:

$$dz = (3x^2y^2 - y^4)dx + (2x^3y - 4xy^3)dy\ .$$

Пример 5. Вычислить полный дифференциал функции

$$u = e^{x^2 y} + z^2 x + z y^3 .$$

Решение. Частные производные имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2 y} \cdot 2xy + z^2, \ \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2 y} \cdot x^2 + z \cdot 3y^2, \ \frac{\partial u}{\partial z} = 2zx + y^3 .$$

Полный дифференциал, согласно (4*), будет равен:

$$du = (2xye^{x^2 y} + z^2)dx + (x^2 e^{x^2 y} + 3y^2 z)dy + (2xz + y^3)dz .$$

С помощью дифференциалов можно приближенно вычислять значение функции в точке с координатами $(x + \Delta x; y + \Delta y)$, равное $z(x + \Delta x; y + \Delta y) = z(x; y) + \Delta z$, заменяя приращение функции Δz ее дифференциалом $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Для этого используется формула:

$$z(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx z(x; y) + dz .$$

Пример 6. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ при $x = 1$, $y = 0$.

Решение. Значение $z(x + \Delta x; y + \Delta y)$ можно вычислить приближенно, заменив полное приращение Δz дифференциалом dz, т. е.

$$z(x + \Delta x; \ y + \Delta y) = z(x; \ y) + \Delta z \approx z(x; \ y) + dz .$$

Значение дифференциала dz вычисляется в точке $M(1; 0)$, при этом $\Delta x = dx = 0,02$, а $\Delta y = dy = 0,05$.

$$dz\big|_M = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_M \cdot 0,02 + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_M \cdot 0,05 = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}\bigg|_M \cdot 0,02 + \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}\bigg|_M \cdot 0,05 =$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{3} \cdot 0,02 + \frac{2 \cdot 0}{3} \cdot 0,05 = \frac{0,04}{3} = 0,013.$$

Тогда

$$\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2} \approx \sqrt[3]{x^2 + y^2}\Big|_M + dz\big|_M = \sqrt[3]{1} + 0,013 \approx 1 + 0,013 = 1,013 .$$

1.4. Градиент функции. Производная по направлению

Градиентом функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ называется вектор, выходящий из точки M и имеющий своими координатами частные производные функции z:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\,. \qquad (5)$$

Аналогично, для функции трех переменных $u = f(x; y; z)$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (5^*)$$

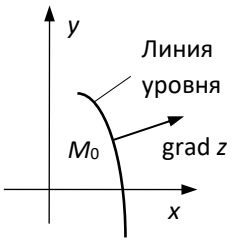


Рис. 5

Градиент указывает направление наискорейшего роста функции в данной точке. Он перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку.

Производной от функции z в точке M ***по направлению*** вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(N) - f(M)}{\Delta l},$$

где Δl – приращения функции z в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$.

Для дифференцируемой функции производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\,, \qquad (6)$$

где α – угол вектора $\overrightarrow{MN}$ с осью x, а β – угол с осью y.

Аналогично, для функции трех переменных $u = f(x; y; z)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,, \qquad (6^*)$$

где γ – угол вектора $\overrightarrow{MN}$ с осью z;

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{MN}$, удовлетворяющие условию $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\text{наиб}} = |\ \text{grad}\, u\ | = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\ . \qquad (7)$$

Пример 7. Найти grad z в точке $M(2; 3)$, если $z = x^3 y - \frac{x}{y}$.

Решение. Найдем частные производные функции z в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2 y - \frac{1}{y}\right)\Big|_M = 3\cdot 4\cdot 3 - \frac{1}{3} = 35\frac{2}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 + \frac{x}{y^2}\right)\Big|_M = 8 + \frac{2}{9} = 8\frac{2}{9},$$

затем используем формулу (6) для вычисления градиента

$$\text{grad}\, z|_M = \left(3x^2 y - \frac{1}{y}\right)\Big|_M \cdot \vec{i} + \left(x^3 + \frac{x}{y^2}\right)\Big|_M \cdot \vec{j} = 35\frac{2}{3}\vec{i} + 8\frac{2}{9}\vec{j}\ .$$

Пример 8. Найти grad u, если $u = x^2 y - \frac{z^2}{x}$.

Решение. Для вычислений используем формулу (6*)

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left(2xy + \frac{z^2}{x^2}\right)\vec{i} + x^2\vec{j} + \left(-\frac{2z}{x}\right)\vec{k}\ .$$

Пример 9. Найти производную функции $u = xy^2 z^3$ в точке $M(3; 2; 1)$ в направлении точки $N(5; 4; 2)$ и наибольшее значение производной по направлению для заданной функции в точке M.

Решение. Вектор $\overrightarrow{MN}$ определяется следующим образом:

$$\overrightarrow{MN} = (5-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\ .$$

Его направляющие косинусы равны:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{1}{3},$$

а частные производные таковы:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = y^2 z^3\Big|_M = 4,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2xyz^3\Big|_M = 12,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 3xy^2 z^2\Big|_M = 36\ .$$

Следовательно, производная по направлению в точке M по формуле (6*) будет равна:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left(y^2z^3\cos\alpha + 2xyz^3\cos\beta + 3xy^2z^2\cos\gamma\right)\Big|_M = 4\cdot\frac{2}{3} + 12\cdot\frac{2}{3} + 36\cdot\frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

Наибольшее значение производной по направлению в данной точке по формуле (7) будет равно:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\text{наиб}}\right|_M = \left.\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\right|_M = \sqrt{4^2 + 12^2 + 36^2} = 4\sqrt{91} \approx 38{,}16.$$

1.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x; y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x;y) = f''_{x^2}(x;y), \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f''_{xy}(x;y), \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x;y) = f''_{y^2}(x;y), \qquad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f''_{yx}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{x^3}(x;y)$$

или $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = f'''_{x^2y}(x;y)$$ и т. д.

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ называются ***смешанными*** и не зависят от порядка дифференцирования, если в рассматриваемой точке они непрерывны вместе с функцией $f(x; y)$ и ее первыми частными производными. То есть, справедливо равенство:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}. \qquad (11)$$

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x; y)$ называется дифференциал от ее первого полного дифференциала:

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 . \qquad (12)$$

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка:

$$d^3z = d(d^2z) \text{ и т. д.}$$

Справедлива символическая формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z .$$

Пример 10. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и d^2z для функции $z = y \ln x$.

Решение. Частные производные первого порядка будут равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x .$$

Частные производные второго порядка на основе формул (8)–(11) будут равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

Дифференциал d^2z по формуле (12) равен:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(-\frac{y}{x^2}\right)dx^2 + \left(\frac{2}{x}\right)dxdy .$$

1.6. Экстремумы функции двух переменных

Функция $z = f(x; y)$ имеет ***максимум*** (***минимум***) в точке $M_0(x_0; y_0)$, если в некоторой ее окрестности выполняется условие

$$f(x_0; y_0) > f(x; y) \qquad (f(x_0; y_0) < f(x; y)).$$

Максимумы и минимумы функции называются ее ***экстремумами***, а точки, в которых они достигаются, называются ***точками экстремума***.

Если дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$, то и частные производные первого порядка равны нулю в этой точке (***необходимое условие экстремума***):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 . \qquad (13)$$

Точки, в которых эти условия выполняются, называются ***стационарными***. Но не всякая стационарная точка является точкой экстремума. Для того чтобы

стационарная точка была точкой экстремума, нужно, чтобы выполнялись ***достаточные условия***.

Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ есть точка экстремума. При обозначениях

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

вычислим определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

Если $\delta(M_0)$ удовлетворяет условиям:

1) $\delta(M_0) > 0$ и $a_{11}(M_0) < 0$, то в точке M_0 – ***максимум*** $f(x; y)$,

2) $\delta(M_0) > 0$ и $a_{11}(M_0) > 0$, то в точке M_0 – ***минимум*** $f(x; y)$,

3) $\delta(M_0) < 0$ – экстремума нет; M_0 – точка ***минимакса*** (***седловина***),

4) $\delta(M_0) = 0$ – требуются дальнейшие исследования. Экстремум в этой точке может быть, а может и не быть.

Пример 11. Найти экстремум функции $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 15y, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 15x. \end{cases}$$

Приравниваем их к нулю и находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 15y = 0, \\ 3y^2 - 15x = 0, \end{cases} \begin{cases} x^2 - 5y = 0, \\ y^2 - 5x = 0, \end{cases} \begin{matrix} y = \dfrac{1}{5}x^2, \\ \dfrac{1}{25}x^4 - 5x = 0, \end{matrix}$$

$$x(x^3 - 125) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 5. \end{cases}$$

Имеем две стационарные точки: $M_1(0; 0)$ и $M_2(5; 5)$.

Проверяем достаточные условия существования экстремума.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -15,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\ .$$

Для точки $M_1(0; 0)$ вычисляем определитель (14):

$$a_{11}(M_1) = 0,\ a_{12}(M_1) = -15,\ a_{22}(M_1) = 0,$$

$$\delta(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & -15 \\ -15 & 0 \end{vmatrix} = -225 < 0,$$

следовательно, в точке M_1 экстремума нет, есть седловина.

Аналогично, для точки $M_2(5; 5)$ вычисляем определитель (14):

$$a_{11}(M_2) = 30,\ a_{12}(M_2) = -15,\ a_{22}(M_2) = 30,$$

$$\delta(M_2) = \begin{vmatrix} 30 & -15 \\ -15 & 30 \end{vmatrix} = 900 - 225 > 0.$$

Так как $a_{11}(M_2) > 0$, то в точке M_2 функция имеет минимум:

$$\min z(M_2) = -125.$$

1.7. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Условным экстремумом функции $z = f(x; y)$ называется такой экстремум этой функции, который достигается при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x; y) = 0$ (***уравнение связи***).

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой ***функции Лагранжа***

$$F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y), \qquad (15)$$

где λ – постоянный множитель, который следует найти.

Необходимыми условиями экстремума являются

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x; y) = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Из этой системы находятся координаты точек условного экстремума.

Достаточное условие проверяется по знаку дифференциала второго порядка от функции Лагранжа:

$$d^2F(M) = F''_{x^2}(M)dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{y^2}dy^2.$$

Если в рассматриваемой точке M справедливо неравенство $d^2F(M) > 0$, то в этой точке минимум, если $d^2F(M) < 0$, то – максимум.

Для того чтобы найти ***наибольшее*** и ***наименьшее*** значения функции в замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки функции $z = f(x; y)$, расположенные в данной области D, границей которой является линия $\varphi(x; y) = 0$. Выявить среди них точки экстремума и вычислить значения функции в них;

2) найти наибольшие и наименьшие значения функции на линии, образующей границу области, т. е. решить задачу на условный экстремум. Вычислить значения функции в точках условного экстремума;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 12. Фирма ежемесячно может ассигновать 100 у.е. (либо тысяч, либо млн. руб.) на производство продукции. Средняя зарплата – 2 у.е., а стоимость единицы сырья – 1 у.е. Требуется определить, какое количество рабочих x и какое количество сырья y необходимо приобрести фирме для получения наибольшего объема продукции Q, если известно, что он им прямо пропорционален с коэффициентом пропорциональности 5.

Решение. Объем продукции равен

$$Q(x; y) = 5xy.$$

Условие связи:

$$2x + y = 100.$$

Тогда функция Лагранжа (15) имеет вид

$$F = 5xy + \lambda(2x + y).$$

Запишем необходимые условия экстремума (16):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 5y + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 5x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x + y - 100 = 0. \end{cases}$$

Выразим x и y через λ из первых двух уравнений:

$$y = -\frac{2\lambda}{5},\ x = -\frac{\lambda}{5}$$

и подставим их в третье уравнение:

$$2\left(-\frac{\lambda}{5}\right)+\left(-\frac{2\lambda}{5}\right)-100=0,$$

$$-\frac{4}{5}\lambda-100=0\Rightarrow\lambda=-125.$$

Тогда

$$x=\frac{125}{5}=25,\ y=\frac{2\cdot125}{5}=50.$$

Дифференциал второго порядка от функции Лагранжа имеет вид:

$$d^2F(x; y) = 10dxdy,$$

так как $F''_{x^2}=0,\ F''_{y^2}=0,\ F''_{xy}=5$. Знак полученного дифференциала зависит от знаков дифференциалов переменных dx и dy. Из условия связи $2x + y = 100$ имеем $y = 100 – 2x$, тогда $dy = –2dx$. То есть

$$d^2F(25; 50) = –20dx^2 < 0.$$

Это значит, что в полученной точке будет максимум и $Q_{\max} = 6250$.

Следовательно, для получения наибольшего объема продукции необходимо нанять 25 человек персонала и приобрести 50 единиц сырья.

Пример 13. Фирма имеет два филиала, издержки производства в которых описываются функциями $F_1(x) = 0,2x^2 + 3x + 100$ и $F_2(y) = 0,4y^2 + 3y + 1000$ соответственно. Где x и y – объемы производимой продукции. Общий спрос на товар фирмы определяется ценой p за единицу продукции, зависящей от объема выпускаемой продукции $z_1 = x + y$ и определяемой функцией $z_2 = 4000 – 4p$. Рассчитать оптимальный объем выпуска продукции для производителя, оптимальную цену в целом и распределение производственной программы по фирмам.

Решение. Оптимальный выпуск продукции определяется максимальной прибылью фирмы, которая равна разности дохода фирмы от реализуемой продукции по цене p и издержек:

$$R(x; y) = p(x + y) – 0,2x^2 – 3x – 100 – 0,4y^2 – 3y – 1000. \quad (*)$$

Найдем значение функции цены p из равенства $z_1 = z_2$

$$x + y = 4000 – 4p,$$

откуда $p=\frac{4000-x-y}{4}$. Подставим это выражение p в функцию прибыли (*):

$$R(x;y)=\frac{4000-x-y}{4}(x+y)-0,2x^2-3x-100-0,4y^2-3y-1000=$$
$$=-0,5x^2-0,65y^2-0,5xy+997x+997y-1100. \quad (**)$$

Определим экстремум функции (**). Для этого вычислим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial R(x;y)}{\partial x} = -x - 0,5y + 997, \quad \frac{\partial R(x;y)}{\partial y} - 1,3y - 0,5x + 997 .$$

Приравняем полученные производные к нулю:

$$\begin{cases} -x - 0,5y + 997 = 0, \\ -0,5x - 1,3y + 997, \end{cases}$$

откуда получим: $x \approx 760,\ y \approx 475$. Исследуем характер экстремума в стационарной точке $M(760; 475)$ с помощью определителя δ (14), где

$$a_{11} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = -1,\ a_{22} = \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} - 1,3,\ a_{12} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = -0,5 .$$

Тогда $\delta(M) = (-1)(-1,3) - 0,25 = 1,05 > 0$. Так как $\delta(M) > 0$ и $a_{11} < 0$, то в полученной точке $M(760; 475)$ будет максимум.

Следовательно, если фирма в первом филиале производит приблизительно 760 единиц продукции, а во втором 475 единиц, то продав ее по цене $p = \frac{4000 - x - y}{4} = \frac{4000 - 760 - 475}{4} \approx 691$ ден. ед. за единицу продукции, она получит максимальную прибыль, равную $R_{\max} = 614\ 239$ ден.ед.

Пример 14. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение. Пусть x и y – катеты треугольника, а z – его гипотенуза, тогда $z^2 = x^2 + y^2$. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $\frac{xy}{2} = S$ или, что то же самое, $xy - 2S = 0$.

Функция Лагранжа (15) имеет вид

$$F(x; y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S).$$

Ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda y,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = xy - 2S .$$

Из геометрических соображений ясно, что $x > 0$ и $y > 0$. Нужно решить систему

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0, \\ 2y + \lambda x = 0, \\ xy - 2S = 0. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$x = y = \sqrt{2S},\ \lambda = -2\ .$$

Следовательно, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

Пример 15. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в круге $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \le 9$.

Решение. Рассматривается область D, ограниченная окружностью $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 9$, включая границу области.

Стационарные точки функции $z = x^2 + y^2$ определяются из условий

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0\ ,$$

откуда единственной стационарной точкой является $M(0; 0)$.

Функция z в этой точке имеет минимум, так как $a_{11}(M) = 2$, $a_{12}(M) = 0$, $a_{22}(M) = 2$, $\delta(M) > 0$ и $a_{11} > 0$, $\min z(M) = 0$.

Исследуем на условный экстремум задачу

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$F = x^2 + y^2 + \lambda[(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 - 9]\ .$$

Ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-\sqrt{2}),\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y-\sqrt{2}),\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 - 9.$$

Для определения x, y и □ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + \lambda(x-\sqrt{2}) = 0, \\ y + \lambda(y-\sqrt{2}) = 0, \\ (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 9. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$x = y = \frac{5}{2}\sqrt{2},\ \lambda = -\frac{5}{3}\ \text{и}\ \ z = 25,$$

$$x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \lambda = -\frac{1}{3}\ \text{и}\ \ z = 1.$$

Следовательно, наибольшее значение функция принимает в точке окружности $M_2\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}; \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$, $\max z(M_2) = 25$, а наименьшее – в точке $M_1(0; 0)$, $\min z(M_1) = 0$.

1.8. Эластичность функции

Пусть дана производственная функция $f(x; y)$, которая зависит от двух факторов: x – затраты живого труда, y – затраты овеществленного труда (затраты на средства производства). Тогда

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (17)$$

– эластичность объема производства относительно x. Значит, с увеличением затрат живого труда на 1% объем производства увеличится на $E_x(z)$ %;

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (18)$$

– эластичность объема производства относительно y. Значит, с увеличением затрат на средства производства на 1% объем производства увеличится на $E_y(z)$ %.

Пример 16. Производственная функция $z = 5x^3 - xy + 4y$. Найти $E_x(z)$ и $E_y(z)$ в точке (1; 3).

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2 - y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4.$$

Тогда используем формулы (17) и (18) для вычисления эластичности. Получим:

$$E_x(z) = \frac{x(15x^2 - y)}{5x^3 - xy + 4y},\ E_y(z) = \frac{y(4 - x)}{5x^3 - xy + 4y}.$$

В заданной точке

$$E_x(z) = \frac{1(15 - 3)}{5 - 3 + 12} = \frac{12}{14} \approx 0{,}86\%,\ E_y(z) = \frac{3(4 - 1)}{14} = \frac{9}{14} \approx 0{,}64\%.$$

Таким образом, с увеличением затрат живого труда на 1%, т. е. от 1 до 1,01, объем производства увеличится на 0,86%, а с увеличением затрат на средства

производства на 1%, т. е. от 3 до 3,03, объем производства увеличится на 0,64%. Так как $E_x(z) > E_y(z)$, то следует в дальнейшем больше средств вкладывать в живой труд (увеличить количество работников либо интенсифицировать их труд и повысить оплату).

1.9. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов применяется для аппроксимации табличных данных с помощью непрерывной функции. Как правило, в таблице задаются значения x_i и y_i, $i = \overline{1, n}$. Это либо результаты эксперимента, либо определенные статистические данные.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Чаще всего эти данные изображают на плоскости в виде отдельных точек (рис. 6) и по их расположению выбирают зависимость, которая связывает эти переменные:

$$y = f(x; a; b; \ldots; c),$$

где $a, b, \ldots, c$ – неизвестные параметры.

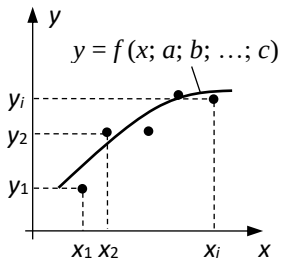


Рис. 6

Зависимости бывают одного из следующих видов:

1) $y = ax + b$ – линейная,

2) $y = ax^2 + bx + c$ – параболическая,

3) $y = a \ln x + b$ – логарифмическая,

4) $y = ba^x$ – показательная,

5) $y = bx^n$ – степенная.

После того, как выбран вид зависимости, необходимо найти неизвестные параметры. Для их определения составляется ***функция невязки*** S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{\,2}, \qquad (19)$$

где $\delta_i = y_i - f(x_i; a; b; \ldots; c)$ – отклонение выбранной зависимости от табличных значений, $i = \overline{1, n}$.

Неизвестные параметры находятся из условия, что функция невязки S должна достигать своего минимального значения. Для этого необходимо, чтобы ее частные производные по каждому из параметров обращались в нуль, то есть

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Решив эту систему, можно единственным образом найти необходимые параметры.

Рассмотрим решение этой задачи на примере **линейной** функции. Пусть $y = ax + b$. В этом случае функция невязки имеет вид:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 . \qquad (21)$$

Частные производные $\frac{\partial S}{\partial b}$ и $\frac{\partial S}{\partial a}$ будут:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1), \\ \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i). \end{cases} \qquad (22)$$

Эти производные равны нулю.

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0, \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i x_i - ax_i^2 - bx_i) = 0. \end{cases}$$

Уравнения можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} b \cdot n + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \qquad (23)$$

Если уравнения почленно разделить на n и ввести обозначения

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad (24)$$

то система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} b + a\bar{x} = \bar{y}, \\ b\bar{x} + a\overline{x^2} = \overline{xy}. \end{cases} \qquad (25)$$

Из решения системы (25) определяются параметры a и b. Благодаря им, из всех прямых будет найдена та, которая является наилучшей в смысле метода наименьших квадратов, т. е. ее функция невязки имеет наименьшее значение.

Для всех остальных зависимостей 2) – 5) параметры вычисляются по аналогичной схеме. Если возникают трудности с выбором функции $f(x; a; b; \ldots; c)$, то определяют несколько различных функций. Затем для каждой из них вычисляют значение невязки (допустим: $S_1, S_2, \ldots, S_n$) и из всех значений S_i выбирают то, которое является наименьшим. Следовательно, такой вид зависимости лучше всех остальных приближает данные таблицы.

Пример 17. Найти вид линейной функции $y = ax + b$, которая наилучшим образом приближает данные таблицы 1.

Таблица 1

x	1	1,5	2	2,5	3
y	1,2	1,4	2,1	2,4	3,1

Решение. При решении все вычисления удобно помещать в таблицу 2.

Таблица 2

N	x	y	xy	x^2
1	1	1,2	1,2	1
2	1,5	1,4	2,1	2,25
3	2	2,1	4,2	4
4	2,5	2,4	6	6,25
5	3	3,1	9,3	9
$\sum$	10	10,2	22,8	22,5
$\frac{1}{n}\sum$	2	2,04	4,56	4,5

В итоге получается система уравнений (25)

$$\begin{cases} b + 2a = 2,04, \\ 2b + 4,5a = 4,56. \end{cases}$$

Ее решение: $b = 0,12$; $a = 0,96$.

Таким образом, прямая, которая в смысле метода наименьших квадратов наилучшим образом приближает табличные данные, имеет вид:

$$y = 0{,}96x + 0{,}12.$$